Adı Soyadı: 10.02.2024
Numarası:

2023-2024 SOYUT MATEMATİK I DERSİ BÜTÜNLEME SINAVI SORULARI

1) a)(10p) X, Y ve Z kümeleri için

$$X \times (Y \cup Z) = (X \times Y) \cup (X \times Z)$$

olduğunu gösteriniz.

b)(15p) Ayrışım nedir, tanımlayınız. Üç elemanlı $\{a, b, c\}$ kümesi üzerindeki tüm ayrışımları ve bu ayrışımlara karşılık gelen denklik bağıntılarını bulunuz.

2) a)(15p) Pozitif tam sayılar kümesi üzerinde bir β bağıntısı

$$a\beta b \Leftrightarrow a.b \text{ bir tam karedir}$$

ile tanımlanıyor. β denklik bağıntısı olur mu? Gösteriniz.

b)(20p) $A = \{2,3,4,5,6,10,120\}$ ve A üzerinde bir $\gamma = \{(a,b): a,b \in A,\ a|b\}$ sıralama bağıntısı veriliyor. Bu durumda *Mak A*, *Min A*, *EBEA*, *EKEA*, *Sup A*, *Inf A* ifadelerini bulunuz. A kümesi γ bağıntısı ile tam sıralı küme olur mu? Açıklayınız.

3) (15p) Ters fonksiyon nedir, tanımlayınız. $f: \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R} - \{1\}$ ve $h: \mathbb{R} - \{1\} \to \mathbb{R} - \{0\}$ olmak üzere $f(x) = \frac{x-1}{x}$ ve $h(x) = \frac{1}{1-x}$ fonksiyonları birbirlerinin tersi olur mu? Araştırınız.

4) Pozitif Reel sayılar kümesinde $\square$ işlemi $a \square b = ab + b$ ile tanımlanıyor.
   a) (10p)$\square$ bir ikili işlem olur mu?
   b) (15p)$\square$ işleminin işlem özelliklerini(birleşme, değişme, birim eleman, ters eleman) inceleyiniz.

Başarılar
Dr. Çağla Çelemoğlu

Cevap Anahtarı

1) a) Keyfi bir $(x,y) \in X \times (Y \cup Z)$ alalım

(10p) $(x,y) \in X \times (Y \cup Z) \Leftrightarrow x \in X \wedge y \in Y \cup Z$

$\Leftrightarrow x \in X \wedge (y \in Y \vee y \in Z)$

$\Leftrightarrow (x \in X \wedge y \in Y) \vee (x \in X \wedge y \in Z)$

$\Leftrightarrow (x,y) \in X \times Y \vee (x,y) \in X \times Z$

$\Leftrightarrow (x,y) \in (X \times Y) \cup (X \times Z)$

olup (x,y) keyfi old. $X \times (Y \cup Z) = (X \times Y) \cup (X \times Z)$

1) b) Tanım, defterde (5p)

(5p) $\{a,b,c\}$ kümesinin ayrışımları ve karşılık gelen denklik bağıntıları (5p)

$A_1=\{\{a,b,c\}\} \longrightarrow D_1=\{(a,a),(b,b),(c,c),(a,b),(b,a),(a,c),(c,a),(b,c),(c,b)\}$

$A_2=\{\{a,b\},\{c\}\} \longrightarrow D_2=\{(a,a),(b,b),(a,b),(b,a),(c,c)\}$

$A_3=\{\{a,c\},\{b\}\} \longrightarrow D_3=\{(a,a),(c,c),(a,c),(c,a),(b,b)\}$

$A_4=\{\{a\},\{b,c\}\} \longrightarrow D_4=\{(a,a),(b,b),(c,c),(b,c),(c,b)\}$

$A_5=\{\{a\},\{b\},\{c\}\} \longrightarrow D_5=\{(a,a),(b,b),(c,c)\}$

(5p) 2) a) Yansıma: $\forall a\in \mathbb{Z}^+$ için $a\beta a$ olur mu?

$\forall a\in\mathbb{Z}^+$ için a^2 bir tam kare old. $a\beta a$ olup yansıma sağlanır

(5p) Simetri: $(a\beta b \Rightarrow ab$ tam karedir.

ab tam kare ise ba tam karedir yani $b\beta a$ olup simetri sağlanır

(5p) Geçişme: $a,b,c\in\mathbb{Z}^+$ için $a\beta b \wedge b\beta c$ ise $a\beta c$ olur mu

$a\beta b \Rightarrow ab$ tam karedir $\Rightarrow ab=k^2,\ k\in\mathbb{Z}^+$

$b\beta c \Rightarrow bc$ tam karedir $\Rightarrow bc=t^2,\ t\in\mathbb{Z}^+$

$\times$

$ab^2c=k^2t^2 \Rightarrow ac=\left(\frac{kt}{b}\right)$

olup $ac=\left(\frac{kt}{b}\right)^2$ her zaman

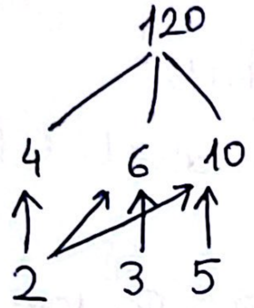
tam kare olur. Yani geçişme sağlanır Çünkü

$ab^2c=k^2t^2 \Rightarrow acb^2=k^2t^2 \Rightarrow \sqrt{ac}\,b=\underbrace{kt}_{\in\mathbb{Z}^+}$ $\sqrt{ac}$ irrasyonel olmaması da

ac tam karedir.

β bir denklik $\in\mathbb{Z}^+$ bağıntısıdır

2 b)



$$\left.\begin{aligned}
&\text{Min } A = \{2,3,5\}\\
&\text{Mak } A = \{120\}\\
&\text{EBE } A = 120\\
&\text{EKE } A \text{ yoktur}\\
&\text{Sup } A = 120\\
&\text{Inf } A = 1
\end{aligned}\right\} (18p)$$

A kümesi γ bölünebilme bağıntısına göre tam sıralı değildir. Çünkü karşılaştırılamayan elemanlar var. Örneğin 2 ile 3 (2p)

3) Tanım defterde (5p)

(5p) $(f \circ h)(x) = f(h(x)) = f\left(\frac{1}{1-x}\right)$

$$= \frac{\frac{1}{1-x} - 1}{\frac{1}{1-x}} = \frac{\frac{1-1+x}{1-x}}{\frac{1}{1-x}}$$

$$= x = i(x)$$

$f \circ h = i$

(5p) $(h \circ f)(x) = h(f(x)) = h\left(\frac{x-1}{x}\right)$

$$= \frac{1}{1-\left(\frac{x-1}{x}\right)}$$

$$= \frac{1}{\frac{x-x+1}{x}} = \frac{x}{1} = x = i(x)$$

$h \circ f = i$ old. f ve h birbirlerinin tersidir.

4) a) $\square : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$

$(a,b) \to a \square b = ab + b$

(5p) kapalılık: $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ için $ab+b \in \mathbb{R}^+$ olup kapalıdır

(5p) İyi tanımlılık, $\forall (a,b),(c,d) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ için.

$(a,b) = (c,d) \Rightarrow a = c \wedge b = d$

$\Rightarrow ab + b = cd + d$ olup iyi tanımlılık sağlanır. Yani $\square$ bir ikili işlemdir

(4p) b) Birleşme öz: $\forall a,b,c \in \mathbb{R}^+$ için

$$\begin{aligned} a \square (b \square c) &= a \square (bc + c) \\ &= a(bc+c) + (bc+c) \\ &= abc + ac + bc + c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (a \square b) \square c &= (ab+b) \square c \\ &= (ab+b)c + c \\ &= abc + bc + c \end{aligned}$$

$\neq$ birleşme öz yoktur

(4p) Değişme öz: $\forall a,b \in \mathbb{R}^+$ için

$a \square b = ab + b$

$b \square a = ba + a$

$\neq$ değişme öz yoktur

(4p) Birim eleman öz, $\forall a \in \mathbb{R}^+$ için

$a \square e = a$ o.ş. $e \in \mathbb{R}^+$ var mı?

$a \square e = ae + e = a \Rightarrow e(a+1) = a \Rightarrow e = \dfrac{a}{a+1}$

$e \square a = a$ o.ş. $e \in \mathbb{R}^+$ var mı?

$\Rightarrow ea + a = a \Rightarrow ea = 0 \Rightarrow e = 0 \notin \mathbb{R}^+$

birim eleman yoktur

(3p) Ters eleman öz, Birim eleman yoksa ters eleman bulunamaz